SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1994-95

Giovanna Citti

REGOLARITÀ C^∞ DELLE SOLUZIONI CLASSICHE DI UN'EQUAZIONE DI TIPO LEVI

25 gennaio 1995

Tecnoprint - Bologna 1995

Sunto Studiamo la regolarità delle soluzioni dell'equazione

$$\mathcal{L}u = k\frac{1+|gradu|^2}{1+u_t^2} \quad in\ \Omega \subset R^3 \qquad (*)$$

dove $$\mathcal{L}u = u_{xx} + u_{yy} + 2\frac{u_y - u_x u_t}{1+u_t^2}u_{xt} - 2\frac{u_x - u_y u_t}{1+u_t^2}u_{yt} + \frac{u_x^2+u_y^2}{1+u_t^2}u_{tt}$$

mentre $k \in C^\infty(\Omega)$ e $k(\xi) \neq 0$ per ogni $\xi \in \Omega$. Si tratta di una semplificazione dell'equazione di Levi classica,

$$\mathcal{L}u = k\left(\frac{1+|gradu|^2}{1+u_t^2}\right)^{3/2}$$

che esprime la curvatura di Levi di una ipersuperficie reale di C^2.

L'equazione (*) è una equazione quasilineare del secondo ordine la cui forma caratteristica è semidefinita positiva e ha determinante nullo in ogni punto e per ogni $u \in C^2$. Per operatori con questo tipo di degenerazione, si hanno risultati di regolarità soltanto nel caso lineare a coefficienti C^∞, mentre per lo studio del caso quasi lineare occorre considerare operatori a coefficienti poco regolari.

Studieremo pertanto dapprima la regolarità delle soluzioni dell'equazione che si ottiene linearizzando l'operatore $\mathcal{L}$ (nel paragrafo 2). Poi, applicando i risultati ottenuti, nel paragrafo 3 proveremo che

se $\alpha > \frac{1}{2}$, ogni soluzione di classe $C^{2,\alpha}$ dell'equazione (*), è di classe C^∞.

Abstract We will study the regularity of the solutions of the equation

$$\mathcal{L}u = k\frac{1+|gradu|^2}{1+u_t^2} \quad in\ \Omega \subset R^3 \qquad (*)$$

where $$\mathcal{L}u = u_{xx} + u_{yy} + 2\frac{u_y - u_x u_t}{1+u_t^2}u_{xt} - 2\frac{u_x - u_y u_t}{1+u_t^2}u_{yt} + \frac{u_x^2+u_y^2}{1+u_t^2}u_{tt},$$

$k \in C^\infty(\Omega)$ and $k(\xi) \neq 0$ for every $\xi \in \Omega$. This is a simplification of the classical Levi equation

$$\mathcal{L}u = k\left(\frac{1+|gradu|^2}{1+u_t^2}\right)^{3/2}$$

which describes the Levi curvature of a real hypersurface of C^2.

(*) is a second order quasilinear equation, whose characteristic form is positively semidefined, and has zero determinant at every point, and for every function u. For such a degenerate operator, some results are known only for the linear case with C^∞ coefficients, while, for the application to the quasilinear case, we need to consider operator with less regular coefficients.

Hence we study first the regularity of the solutions of the linearized equation (in section 2), then (in section 3) we shall apply these results, to show that:

If $\alpha > \frac{1}{2}$, and u is a solution of (*) of class $C^{2,\alpha}$, then u is of class C^∞.

Section 4 contains a more detailed summary of this work.

1 Introduzione

Studiamo la regolarità delle soluzioni dell'equazione

$$\mathcal{L}u = k\frac{1+|gradu|^2}{1+u_t^2} \quad in\ \Omega \subset R^3 \tag{1}$$

dove

$$\mathcal{L}u = u_{xx} + u_{yy} + 2\frac{u_y - u_x u_t}{1+u_t^2}u_{xt} - 2\frac{u_x - u_y u_t}{1+u_t^2}u_{yt} + \frac{u_x^2+u_y^2}{1+u_t^2}u_{tt}$$

e $k \in C^\infty(\Omega)$. Qui abbiamo indicato (x, y, z) gli elementi di R^3, u_x la derivata prima rispetto a x, $gradu$ il gradiente euclideo di u, e u_{xt} la derivata seconda fatta rispetto a x e t.

L'equazione considerata è una semplificazione dell'equazione di Levi ordinaria

$$\mathcal{L}u = k\frac{\left(1+|gradu|^2\right)^{\frac{3}{2}}}{1+u_t^2}$$

che esprime la curvatura di Levi di una ipersuperficie reale di C^2 (si veda anche [T] per ulteriori dettagli sul significato geometrico dell'equazione). Si tratta di una equazione quasilineare del secondo ordine, la cui forma caratteristica è semidefinita positiva e ha determinante nullo in ogni punto e per ogni $u \in C^2$. Pertanto $\forall \epsilon > 0$ l'operatore

$$\mathcal{L}u + \epsilon\Delta u$$

è ellittico, e l'equazione è stata inizialmente studiata con tecniche di tipo ellittico, e con passaggi al limite per $\epsilon \to 0$. In particolare Debiard e Gaveau in [DG] hanno provato il seguente principio di massimo debole

Se Ω è aperto, limitato e connesso, k è continua e non positiva, u è soluzione di (1) di classe C^2, che soddisfa la condizione $limsup_{\xi\to\eta}u(\xi) \leq 0\ \forall\eta \in \partial\Omega$, allora $u \leq 0$ in Ω.

Tommassini ha poi provato la seguente versione del principio di massimo forte: (si veda [T])

Se Ω è aperto limitato e connesso, k è continua e non positiva, u è una funzione di classe C^2 soluzione dell'equazione (1) in Ω ed esiste $\xi_0 \in \Omega$ tale che $u(\xi_0) = \max_\Omega u$, allora $u(\xi) = \max_\Omega\ \forall\xi = (x, y, t) \in \Omega$ tale che $t = t_0$.

Piú recentemente Slodkowsky e Tomassini hanno provato che il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = k\frac{(1+|gradu|^2)^{3/2}}{(1+u_t^2)} & in\ \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = g \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \end{cases}$$

ha almeno una soluzione viscosa $u \in Lip(\bar{\Omega})$, quando Ω è pseudoconvesso e k soddisfa una opportuna ipotesi geometrica, legata alla curvatura di Levi di $\partial\Omega \times R$ (si veda [ST]).

Risultati di regolarità si conoscono soltanto quando $k = 0$. Infatti Bedford e Gaveau hanno dimostrato che se $k = 0$, Ω è pseudoconvesso e ϕ è una funzione di classe $C^{m+5}(\partial\Omega)$, il problema

$$\begin{cases} L(u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \phi & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

ha una soluzione di classe $C^{m+\alpha}(\Omega) \cap Lip(\bar{\Omega})$ (vedi [BG]).

In [C] abbiamo invece introdotto per lo studio dell'equazione (1) una tecnica completamente diversa, che si può usare se $k(\xi) \neq 0$ per ogni $\xi \in \Omega$, osservando che, se l'equazione ammette almeno una soluzione u di classe C^2, si possono associare ad essa due campi vettoriali $X = X(u)$ e $Y = Y(u)$ tali che la forma caratteristica dell'operatore si scrive nel modo seguente:

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{i,j}\xi_i\xi_j =< X, \xi >^2 + < Y, \xi >^2$$

ed inoltre X, Y e $[X, Y]$ sono linearmente indipendenti in ogni punto. Con questa osservazione e il principio di propagazione dei massimi di Bony abbiamo dimostrato un teorema di confronto forte per le soluzioni dell'equazione (1).

Con un tecnica analoga proviamo ora che

Teorema 1.1 *Se u è una funzione di classe $C^{2,\alpha}$, con $\alpha > \frac{1}{2}$, soluzione dell'equazione (1), e $k(\xi) \neq 0$ per ogni $\xi \in \Omega$, allora u è di classe C^∞.*

Il risultato di Tomassini assicura che esistono soluzioni viscose dell'equazione, mentre per provare la regolarità noi abbiamo supposto che siano di classe $C^{2,\alpha}$. Rimane quindi ancora da provare che le soluzioni Lipshitziane sono di classe $C^{2,\alpha}$. Inoltre, come abbiamo detto l'equazione che abbiamo studiato, non è l'equazione di Levi classica, ma una modifica di quella, che tuttavia contiene inalterato l'operatore di Levi.

I risultati di Bony (si veda [B]) si applicano ad operatori **lineari** del tipo seguente:

$$L = \sum_{i=1}^{p} Z_i^2, \quad p \in N \tag{3}$$

dove Z_i sono operatori lineari del primo ordine di classe C^∞ e l'algebra di Lie da essi generata ha rango massimo in ogni punto. Per le soluzioni di equazioni di questo tipo gli operatori Z_i giocano un ruolo formalmente analogo a quello delle derivate nel caso ellittico. Infatti se ξ è un punto fissato, (identificando Z_i con il campo vettoriale che ha le stesse componenti), si può considerare la funzione $\gamma_i : [0, 1] \to R^3$, curva integrale di Z_i tale che $\gamma_i(0) = \xi$, e si chiama derivata parziale di u nella direzione Z_i la seguente derivata, se esiste:

$$Z_i u(\xi) = \frac{d}{dh}(u \circ \gamma_i)_{|h=0}. \tag{4}$$

Si chiama allora gradiente subellittico u il vettore $Du = (Z_1 u, ..., Z_p u)$. Si dice quindi che una funzione u è di classe C^1_L se esistono $D_i u$ per $i = 1, ..., p$, e sono continue, ed in modo analogo si definiscono le classi C^k_L.

La metrica naturale associata all'operatore L non è la metrica Euclidea, ma la cosiddetta "metrica di controllo" associata ai campi, che si definisce come segue (si veda [NSW].)

Una curva regolare a tratti $\gamma : [0, T] \to R^3$ si dice sub-unitaria se per ogni $\xi \in R^3$ e $t \in [0, T]$

$$(\dot{\gamma}(t) \cdot \xi)^2 \leq \sum_{i=1}^{p} (Z_i(\gamma(t)) \cdot \xi)^2$$

Fissati due punti $\xi, \xi_0 \in R^3$ la distanza di controllo è definita

$$d(\xi, \xi_0) = inf\{T > 0 | Esiste\ \gamma : [0, T] \to R^3\ che\ congiunge\ \xi\ e\ \xi_0\}. \tag{5}$$

In termini di questa distanza si definiscono opportune classi di Lipschitz, che sono le classi naturali in cui studiare la regolarità delle soluzioni dell'operatore L. Si dice infatti che una funzione u è di classe $C^\alpha_L(\Omega)$ con $\alpha \in]0, 1[$ se esiste una costante $C > 0$ tale che

$$|u(\xi) - u(\xi_0)| \leq C d^\alpha(\xi, \xi_0) \quad \forall \xi, \xi_0 \in \Omega$$

Si dice che u è di classe $C^{k,\alpha}_L(\Omega)$ con k intero e $\alpha \in]0, 1[$ se tutte le sue derivate di ordine k (fatte rispetto ai campi) sono di classe C^α_L. Vale il risultato seguente:

Teorema *Se Z_i sono campi vettoriali di classe C^∞, che generano un'algebra di Lie di rango massimo in ogni punto, L è definito come in (3), f è di classe $C^\alpha_L(\Omega)$, allora ogni soluzione u di $Lu = f$ è di classe $C^{2,\alpha}_L(\Omega)$* (si veda [RS]).

2 Una classe di operatori lineari

L'operatore di Levi non è lineare e non si presenta come un operatore somma di quadrati di campi vettoriali, ma lo studieremo con teniche non dissimili da queste. Se l'equazione ha una soluzione regolare u, indicheremo infatti con X e Y le prime due colonne della matrice caratteristica:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{u_y - u_x u_t}{1+u_t^2} \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{u_x + u_y u_t}{1+u_t^2} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Se Xu e Yu indicano le derivate di u nelle direzione di X e Y, si ha

$$Xu = u_x + \frac{u_y - u_x u_t}{1 + u_t^2} u_t = \frac{u_x + u_y u_t}{1 + u_t^2},$$

$$Yu = u_y - \frac{u_x + u_y u_t}{1 + u_t^2} u_t = \frac{u_y - u_x u_t}{1 + u_t^2},$$

e quindi

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ Yu \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -Xu \end{pmatrix}.$$

Pertanto l'operatore $\mathcal{L}$ diventa:

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{i,j} \partial^2_{i,j}, \tag{7}$$

dove $\partial^2_{i,j}$ sono le derivate seconde ordinarie e

$$(a_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & Yu \\ 0 & 1 & -Xu \\ Yu & -Xu & (Xu)^2 + (Yu)^2 \end{pmatrix};$$

cioè si tratta di un operatore quasi lineare del secondo ordine, i cui coefficienti dipendono dal gradiente subellittico di u. L'equazione (1) si scrive poi:

$$\mathcal{L}u = k(1 + (Xu)^2 + (Yu)^2).$$

Definiremo allora operatore linearizzato di $\mathcal{L}$ l'operatore

$$L = \sum_{i,j=1}^{3} a_{i,j} \partial^2_{i,j}, \tag{8}$$

dove

$$(a_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ a & b & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

per opportune funzioni a e b. Per questo tipo di operatori si conoscono risultati di regolarità soltanto se i coefficienti sono C^∞; per studiare il caso quasilineare occorre invece considerare operatori lineari a coefficienti poco regolari. Supponiamo quindi che a e b siano funzioni continue in Ω in senso Euclideo, e che L sia un operatore del tipo (8). Indichiamo, in analogia ai campi precedenti

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \quad e \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

le prime due colonne della matrice (9). Le curve integrali di X e Y uscenti da un fissato punto sono univocamente determinate anche nella sola ipotesi di continuità delle funzioni a e b. Allora si possono definire le classi C^1_L, esattamente come nel caso regolare. In queste sole ipotesi, tuttavia non parleremo di

funzioni di classe C^2_L, perchè nemmeno le funzioni di classe C^∞ in senso classico risulterebbero di classe C^2_L. Infatti

$$Xf = \partial_x f + a\partial_t f \quad \forall f \in C^\infty,$$

che in generale non sarà derivabile, se non lo è a. Se invece

H1) a e b sono di classe C^1_L,

diciamo che una funzione f è di classe C^2_L se Xf e Yf sono di classe C^1_L. Analogamente se a e b sono di classe C^2_L parleremo di funzioni di classe C^3_L. Supponiamo inoltre che

H2) $Xb - Ya \neq 0 \forall x \in \Omega$

Sotto queste ipotesi, per ogni coppia di punti ξ e $\xi_0 \in \Omega$ esiste una curva subunitaria γ di estremi ξ e ξ_0. Quindi si può parlare di distanza nel senso della definizione (5), e sono definite le classi di Lipschitz $C^{1,\alpha}_L$ e $C^{2,\alpha}_L$. Inoltre se f è di classe $C^{2,\alpha}_L$, allora è derivabile rispetto a t, e si ha

$$[X,Y]f = (Xb - Ya)\partial_t f$$

In particolare quindi l'ipotesi H2) inplica che $X, Y, [X,Y]$ sono linearmente indipendenti in ogni punto.

Osserviamo esplicitamente che, sotto le ipotesi fatte l'operatore L si può scrivere in forma di divergenza, e diviene

$$L = X^2 + Y^2 - (Xa + Yb)\partial_t \tag{10}$$

per cui, se u è di classe C^2_L, si può considerare Lu.

Osserviamo anche che, se $f \in C^{1,\alpha}$ in senso ordinario, allora $f \in C^{1,\alpha}_L$, mentre se $f \in C^{1,\alpha}_L$, non sarà nemmeno C^1. Se invece f è di classe $C^{2,\alpha}_L$, allora è di classe $C^{1,\alpha/2}$ (in senso ordinario). Pertanto se f ha derivate di ogni ordine rispetto ai campi X e Y è di classe C^∞ in senso ordinario.

Con queste notazioni proveremo il seguente:

Teorema 2.1 *Sia u soluzione di classe $C^{2,\alpha}_L$ dell'equazione $Lu = f \in C^{1,\alpha}_L$, dove i coefficienti a e b verificano le ipotesi H1, H2 e sono di classe $C^{2,\alpha}_L$.*

Allora u è di classe $C^{3,\alpha}_L$.

Lo studio della regolarità si ottiene con un opportuno adattamento del motodo di "freezing". Nel caso ellittico gli operatori a coefficienti costanti costituiscono una classe di operatori modello per lo studio degli operatori a coefficienti variabili, e il congelato di un fissato operatore si ottiene semplicemente valutando i suoi coefficienti in un punto ξ_0. Poiché invece la matrice $(a_{i,j})$ che consideriamo è estrememente degenere, non si può semplicemente procedere in questo modo. Nel caso a coefficienti C^∞, Folland e Stein in [FS], e Rothschild e Stein [RS] hanno utilizzato la funzione sponenziale per associare ad ogni operatore somma di quadrati di campi vettoriali, un opportuno operatore congelato,

appartenente alla classe degli operatori nihilpotenti. Nel caso in esame introduciamo una idea di congelato non dissimile da questa, sostituendo ai coefficienti $(a_{i,j})$, il loro sviluppo di Taylor al primo ordine nella direzione dei campi. Sotto le ipotesi fatte si ha: per ogni $\xi = (x, y, t)$ e $\xi_0 = (x_0, y_0, t_0)$

$$a(\xi) = a(\xi_0) + Xa(\xi_0)(x - x_0) + Y(\xi_0)(y - y_0) + O(d(\xi, \xi_0)^{1+\alpha}.$$

Indicheremo quindi

$$Pa_{\xi_0}(\xi) = a(\xi_0) + Xa(\xi_0)(x - x_0) + Y(\xi_0)(y - y_0)$$

e

$$L_{\xi_0} = \sum_{i=1}^{2} b_{i,j}\partial^2_{i,j},$$

con

$$(b_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & Pa_{\xi_0} \\ 0 & 1 & Pb_{\xi_0} \\ Pa_{\xi_0} & Pb_{\xi_0} & Pa^2_{\xi_0} + Pb^2_{\xi_0} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Indicheremo inoltre

$$X_{\xi_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ Pa_{\xi_0} \end{pmatrix} \quad e \quad Y_{\xi_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ Pb_{\xi_0} \end{pmatrix}.$$

Questi campi sono di classe C^∞, e, come si verifica subito,

$$[X_{\xi_0}, Y_{\xi_0}] = (Xa(\xi_0) - Yb(\xi_0))\partial_t.$$

Quindi anche X_{ξ_0}, Y_{ξ_0} e $[X_{\xi_0}, Y_{\xi_0}]$ sono linearmente indipendenti in ogni punto per ipotesi, e nihilpotenti. Il cambiamento di variabile

$$\phi_{\xi_0}(x, y, t) = \Big(x, y, \frac{2}{q-\sigma}(2t - px^2 - sy^2 - (\sigma + q)xy) - \\ - \frac{4(a(\xi_0) - qy_0 - px_0)x}{q-\sigma} - \frac{4(b(\xi_0) - \sigma x_0 - sy_0)y}{q-\sigma}\Big)$$

trasforma L_{ξ_0} nel Laplaciano di Kohn sul gruppo di Heisenberg: un operatore ipoellittico, di cui si conosce una espressione esplicita sia della distanza di controllo sia della soluzione fondamentale, e delle sue derivate nelle direzioni dei campi. Indicata con d_{ξ_0} la distanza di controllo, si ha la stima seguente della soluzione fondamentale:

$$\Gamma_{\xi_0}(\xi, \zeta) \simeq d_{\xi_0}^{-q+2}(\xi, \zeta) \quad q = 4.$$

Inoltre:

$$X_{\xi_0}\Gamma_{\xi_0}(\xi, \zeta) \simeq d_{\xi_0}^{-q+1}(\xi, \zeta), \quad Y_{\xi_0}\Gamma_{\xi_0}(\xi, \zeta) \simeq d_{\xi_0}^{-q+1}(\xi, \zeta),$$

$$\partial_t \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta) \simeq d_{\xi_0}^{-q}(\xi,\zeta).$$

Utilizzando Γ_{ξ_0} scriviamo una formula di rappresentazione per le funzioni di classe $C_L^{2,\alpha}$, e per operatori a coefficienti $C_L^{1,\alpha}$. Procediamo dapprima formalmente. Se ϕ è una funzione test, si ha

$$(v\phi)(\xi) = \int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta) L_{\xi_0}(v\phi)(\zeta) d\zeta =$$

$$= \int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta) L(v\phi)(\zeta) d\zeta + \int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)(L_{\xi_0} - L)(v\phi)(\zeta) d\zeta.$$

Per definizione

$$(L_{\xi_0} - L)(v\phi) = \sum_{i,j=1}^{3} (b_{i,j} - a_{i,j}) \partial_{i,j}^2 (v\phi)$$

dove $\partial_{i,j}^2$ sono derivate seconde ordinarie. In particolare, fra questi addendi compare

$$(a_{3,3} - b_{3,3}) \partial_{t,t}^2.$$

Come abbiamo già osservato

$$\partial_t (v\phi) = \frac{1}{Xb - Ya} [X,Y](v\phi)$$

quindi ∂_t è una derivata seconda nella direzione dei campi, e $\partial_{t,t}^2$ una derivata quarta. La formula precedente non si può quindi utilizzare direttamente, per funzioni di classe $C_L^{2,\alpha}$. Rothschild e Stein, nello studio di equazioni lineari a coefficienti C^∞ risolvono un problema analogo integrando per parti, e "scaricando" le derivate su Γ_{ξ_0} e sui coefficienti di L_{ξ_0}. Nel nostro caso tuttavia i coefficienti di L sono soltanto di classe $C_L^{1,\alpha}$, non si possono derivare rispetto a t. Occorre quindi procedere con maggior cautela, integrando per parti in maniera da applicare ai coefficienti di L al piú una derivata nella direzione X o Y, e a Γ_{ξ_0} solo derivate nelle direzioni X_{ξ_0} o Y_{ξ_0}, che si sanno stimare. La formula che si ottiene è la seguente:

Teorema 2.2 *Sia $v \in C_L^{2,\alpha}$ e $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ allora $v\phi$ si può rappresentare nel modo seguente:*

$$\phi v(\xi) = A(\xi,\xi_0) + B(\xi,\xi_0) + \partial_t v(\xi_0) C(\xi,\xi_0) + E(\xi,\xi_0),$$

dove

$$A(\xi,\xi_0) = \int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta) L v(\zeta) \phi(\zeta) d\zeta$$

$$B(\xi,\xi_0) = 2 \int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)(Xa(\zeta) - Xa(\xi_0))\phi(\zeta)(\partial_t v(\zeta) - \partial_t v(\xi_0)) d\zeta +$$

$$+2\int X_{\xi_0}\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)(a(\zeta)-Pa_{\xi_0}(\zeta))\phi(\zeta)(\partial_t v(\zeta)-\partial_t v(\xi_0))d\zeta+$$

$$+\int \partial_t\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)(a(\zeta)-Pa_{\xi_0}(\zeta))^2\phi(\zeta)(\partial_t v(\zeta)-\partial_t v(\xi_0))d\zeta+$$

$$+2\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)(Yb(\zeta)-Yb(\xi_0))\phi(\zeta)(\partial_t v(\zeta)-\partial_t v(\xi_0))d\zeta+$$

$$+2\int Y_{\xi_0}\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)(b(\zeta)-Pb_{\xi_0}(\zeta))\phi(\zeta)(\partial_t v(\zeta)-\partial_t v(\xi_0))d\zeta+$$

$$+\int \partial_t\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)(b(\zeta)-Pb_{\xi_0}(\zeta))^2\phi(\zeta)(\partial_t v(\zeta)-\partial_t v(\xi_0))d\zeta,$$

$$C(\xi,\xi_0)=-2\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)(a(\zeta)-Pa_{\xi_0}(\zeta))X_{\xi_0}\phi(\zeta)d\zeta-$$

$$-2\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)(b(\zeta)-Pb_{\xi_0}(\zeta))Y_{\xi_0}\phi(\zeta)d\zeta-$$

$$-\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)(a(\zeta)-Pa_{\xi_0}(\zeta))^2\partial_t\phi(\zeta)d\zeta-$$

$$-\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)(b(\zeta)-Pb_{\xi_0}(\zeta))^2\partial_t\phi(\zeta)d\zeta,$$

$$E(\xi,\xi_0)=2\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)Xv(\zeta)X_{\xi_0}\phi(\zeta)d\zeta+$$

$$+2\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)Yv(\zeta)Y_{\xi_0}\phi(\zeta)d\zeta+\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)v(\zeta)L_{\xi_0}\phi(\zeta)d\zeta+$$

$$+\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)(a(\zeta)-Pa_{\xi_0}(\zeta))^2\partial_t v(\zeta)\partial_t\phi(\zeta)d\zeta+$$

$$+\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)(b(\zeta)-Pb_{\xi_0}(\zeta))^2\partial_t v(\zeta)\partial_t\phi(\zeta)d\zeta.$$

Usando questa formula si prova il Teorema 2.1.

Dimostrazione Non diamo in questa sede una prova completa di questa affermazione, ma vogliamo soltanto dare un'idea di come si possa dedurre dalla formula di rappresentazione. Consideriamo per semplicità soltanto un termine:

$$v_1(\xi)=\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)(Xa(\zeta)-Xa(\xi_0))(\partial_t u(\zeta)-\partial_t u(\xi_0))d\zeta.$$

E' del tutto standard verificare che

$$D^2_{i,j}v_1(\xi)=\int D^2_{i,j}\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)(Xa(\zeta)-Xa(\xi_0))(\partial_t u(\zeta)-\partial_t u(\xi_0))d\zeta,$$

dove l'integrale è un integrale singolare. Se inoltre $\xi = \xi_0$ è convergente anche l'integrale

$$I = \int D^3_{i,j,p}\Gamma_{\xi_0}(\xi_0,\zeta)(Xa(\zeta) - Xa(\xi_0))(\partial_t u(\zeta) - \partial_t u(\xi_0))d\zeta,$$

poiché

$$|D^3_{i,j,p}\Gamma_{\xi_0}||Xa(\zeta) - Xa(\xi_0)||\partial_t(\zeta) - \partial_t(\xi_0)| \leq d_{\xi_0}^{-q+2\alpha-1}(\xi_0,\zeta)$$

dove $2\alpha > 1$ per ipotesi. In effetti si prova che $I = D^3_{i,j,p}v_1(\xi_0)$. Osservazioni analoghe valgono per ogni addendo che compare nella formula di rappresentazione di u. Pertanto per ogni ξ_0 esiste $D^3_{i,j,p}u(\xi_0)$. Anche la regolarità si prova studiando direttamente i diversi termini che compaiono nella formula.

Osserviamo che la regolarità $C^{2,\alpha}_L$ dei coefficienti di L è stata usata per calcolare $D^3_{i,j,p}\Gamma_{\xi_0}$. Infatti Γ_{ξ_0} è di classe C^∞ fuori dalla diagonale, ma, come abbiamo già osservato, ciò non è in generale sufficiente per assicurare l'esistenza delle derivate terze nelle direzioni dei campi. Se infatti i coefficienti di L sono soltanto di classe $C^{1,\alpha}_L$ la formula di rappresentazione si può ancora scrivere, ma esistono soltanto

$$X\partial_t\Gamma_{\xi_0} \quad Y\partial_t\Gamma_{\xi_0} \quad \partial_t X_{\xi_0}\Gamma_{\xi_0} \quad \partial_t Y_{\xi_0}\Gamma_{\xi_0}$$

e piú in generale tutte le derivate terze nelle direzioni X_{ξ_0} e Y_{ξ_0}, quindi procedendo come sopra si ottiene il seguente:

Lemma 2.1 *Sia u soluzione di $Lu = f$, dove i coefficienti di L e f sono di classe $C^{1,\alpha}_L$, allora esistono*

$$X\partial_t u \quad Y\partial_t u \quad \partial_t X_{\xi_0} u \quad \partial_t Y_{\xi_0} u$$

e sono di classe C^α_L.

In particolare $\partial_t u$ è di classe $C^{1,\alpha}_L$.

3 L'equazione quasilineare

Se u è una funzione di classe C^1 in senso ordinario si possono definire i campi X e Y come in (6) e considerare le relative classi di Lipschitz $C^{2,\alpha}_{\mathcal{L}}$. Se inoltre $u \in C^{2,\alpha}_{\mathcal{L}}$, rispetto a questi campi l'operatore di Levi si può scrivere nella forma (10), ponendo $a = Yu$ e $b = -Xu$.

Diciamo quindi che u è soluzione dell'equazione (1) se è di classe $C^{2,\alpha}_{\mathcal{L}}$ e verifica

$$\mathcal{L}u = X^2u + Y^2u - (Xa + Yb)\partial_t u = k(1 + |Xu|^2 + |Yu|^2)$$

Osserviamo che:

$$Xa + Yb = XYu - YXu = [X, Y]u = (Xb - Ya)\partial_t u = (-X^2u - Y^2u)\partial_t u$$

pertanto $\mathcal{L}$ si scrive:

$$\mathcal{L} = (X^2 + Y^2)(1 + (\partial_t u)^2).$$

ed inoltre

$$Xb - Ya = -(X^2u + Y^2u) = k\frac{(1 + |Xu|^2 + |Yu|^2)}{1 + (\partial_t u)^2}$$

L'ipotesi H2) significa quindi semplicemente che $k(\xi) \neq 0$ per ogni $\xi \in \Omega$.

Dimostreremo allora

Teorema 3.1 *Se u è una funzione di classe $C^{2,\alpha}_{\mathcal{L}}$, soluzione dell'equazione (1), con $\alpha > 1/2$ e $k(\xi) \neq 0$ per ogni ξ, allora u è di classe C^∞.*

In particolare da questo e dalle relazioni fra le classi di Lipschitz associate a $\mathcal{L}$ si deduce il teorema 1.1.

Cominciamo ora con un lemma

Lemma 3.1 *Se u è una funzione di classe $C^{2,\alpha}_{\mathcal{L}}$, soluzione dell'equazione (1),*

$$\mathcal{L}u = k(1 + |Xu|^2 + |Yu|^2)$$

con $2\alpha > 1$, e $k(\xi) \neq 0$ per ogni ξ, allora $\partial_t u \in C^{2,\alpha}_{\mathcal{L}}$ e $u \in C^{3,\alpha}_{\mathcal{L}}$.

Cenno di dimostrazione. Anche in questo caso non vogliamo fornire una prova completa dell'affermazione, e ci limitiamo a presentare uno schema della prova. Dimostreremo nei dettagli soltanto che esiste $\partial_t Xu$ per dare un'idea di come interviene la non linearità dell'operatore.

Poiché $a = Yu$ e $b = -Xu \in C^{1,\alpha}_{\mathcal{L}}$, allora, fissata la funzione u, $\mathcal{L}$ può essere pensato come un operatore lineare a coefficienti $C^{1,\alpha}_{\mathcal{L}}$, che quindi verifica le ipotesi del Lemma 2.1. Proviamo che esiste $\partial_t Xu$, calcolando esplicitamente il limite del rapporto incrementale di Xu. Indicato con e_3 il terzo elemento della base canonica in R^3 si ha

$$\frac{Xv(\xi_0 + te_3) - Xv(\xi_0)}{t} =$$

$$= \frac{X_{\xi_0}v(\xi_0 + te_3) - X_{\xi_0}v(\xi_0)}{t} + \frac{(X - X_{\xi_0})v(\xi_0 + te_3)}{t} =$$

$$= \frac{X_{\xi_0}v(\xi_0 + te_3) - X_{\xi_0}v(\xi_0)}{t} + \frac{a(\xi_0 + te_3) - a(\xi_0)}{t}\partial_t v(\xi_0 + te_3) =$$

$$= \frac{X_{\xi_0}v(\xi_0 + te_3) - X_{\xi_0}v(\xi_0)}{t} + \frac{Yu(\xi_0 + te_3) - Yu(\xi_0)}{t}\partial_t v(\xi_0 + te_3) =$$

$$= \frac{X_{\xi_0}v(\xi_0+te_3)-X_{\xi_0}v(\xi_0)}{t} + \frac{Y_{\xi_0}v(\xi_0+te_3)-Y_{\xi_0}v(\xi_0)}{t}\partial_t v(\xi_0+te_3)+$$
$$+\frac{(Y-Y_{\xi_0})v(\xi_0+te_3)}{t}\partial_t v(\xi_0+te_3) =$$
$$= \frac{X_{\xi_0}v(\xi_0+te_3)-X_{\xi_0}v(\xi_0)}{t} + \frac{Y_{\xi_0}v(\xi_0+te_3)-Y_{\xi_0}v(\xi_0)}{t}\partial_t v(\xi_0+te_3)+$$
$$\frac{b(\xi_0+te_3)-b(\xi_0)}{t}(\partial_t v(\xi_0+te_3))^2 =$$
$$= \frac{X_{\xi_0}v(\xi_0+te_3)-X_{\xi_0}v(\xi_0)}{t} + \frac{Y_{\xi_0}v(\xi_0+te_3)-Y_{\xi_0}v(\xi_0)}{t}\partial_t v(\xi_0+te_3)-$$
$$-\frac{Xv(\xi_0+te_3)-Xv(\xi_0)}{t}(\partial_t v(\xi_0+te_3))^2.$$

Quindi

$$\frac{Xv(\xi_0+te_3)-Xv(\xi_0)}{t}(1+(\partial_t v(\xi_0+te_3))^2) =$$
$$= \frac{X_{\xi_0}v(\xi_0+te_3)-X_{\xi_0}v(\xi_0)}{t} + \frac{Y_{\xi_0}v(\xi_0+te_3)-Y_{\xi_0}v(\xi_0)}{t}\partial_t v(\xi_0+te_3)$$

Esiste quindi

$$\partial_t Xv(\xi_0) = \frac{1}{1+(\partial_t v(\xi_0))^2}(\partial_t X_{\xi_0}v(\xi_0)+\partial_t Y_{\xi_0}v(\xi_0)\partial_t v(\xi_0))$$

ed è di classe C^α, perche' lo sono $\partial_t X_{\xi_0}v(\xi_0)$, $\partial_t Y_{\xi_0}v(\xi_0)$ e $\partial_t v(\xi_0)$. Analogamente si prova l'esistenza di $\partial_t Yv(\xi_0)$.

Indichiamo ora brevemente come si può concludere la prova. Nel Teorema 2.1 abbiamo mostrato che, se u è di classe $C_L^{2,\alpha}$, (e quindi $\partial_t u \in C_L^\alpha$) allora $\partial_t u$ è di classe $C_L^{1,\alpha}$. Poiché d'altra parte l'unica derivata seconda che compare esplicitamente nella formula di rappresentazione è $\partial_t u$, e questa è ora di classe $C_L^{1,\alpha}$, allora dalla stessa formula si deduce che $\partial_t u$ è di classe $C_L^{2,\alpha}$. Poiché u ha derivate terze nelle direzioni X_{ξ_0} e Y_{ξ_0}, in ξ_0 per ogni ξ_0 e

$$X = X_{\xi_0} + (a - Pa_{\xi_0})\partial_t \quad Y = Y_{\xi_0} + (b - Pb_{\xi_0})\partial_t.$$

allora la regolarità nella direzione t consente di provare che u ha derivate terze anche nelle direzioni X e Y, procedendo sostanzialmente come nella prova della prima parte di questo lemma.

Dimostrazione del Teorema 3.1. Dal lemma precedente sappiamo che $u \in C_{\mathcal{L}}^{3,\alpha}$ $\partial_t u \in C_{\mathcal{L}}^{2,\alpha}$. Derivando l'equazione (1) si vede che Xu, Yu e $\partial_t u$ soddisfano ancora equazioni del tipo:

$$\mathcal{L}Xu = g_1 \quad \mathcal{L}Yu = g_2 \quad \mathcal{L}\partial_t u = g_3$$

dove g_1, g_2 e g_3 sono funzioni di classe $C^{1,\alpha}_{\mathcal{L}}$ Poiché l'operatore di Levi si può pensare come un operatore lineare a coefficienti $C^{2,\alpha}_{\mathcal{L}}$, allora per il Teorema 2.1 Xu, Yu e $\partial_t u$ sono di classe $C^{3,\alpha}_{\mathcal{L}}$; ovvero $u \in C^{4,\alpha}_{\mathcal{L}}$ $\partial_t u \in C^{3,\alpha}_{\mathcal{L}}$. Iterando il procedimento si ottiene la tesi.

4 Summary

We will study the regularity of the solutions of the equation

$$\mathcal{L}u = k\frac{1+|gradu|^2}{1+u_t^2} \quad in\ \Omega \subset R^3 \tag{12}$$

where

$$\mathcal{L}u = u_{xx} + u_{yy} + 2\frac{u_y - u_x u_t}{1+u_t^2}u_{xt} - 2\frac{u_x - u_y u_t}{1+u_t^2}u_{yt} + \frac{u_x^2+u_y^2}{1+u_t^2}u_{tt}, \tag{13}$$

$k \in C^\infty(\Omega)$. Here we have denoted (x,y,t) a point of R^3, u_x the first derivative with respect to x, and $grad$ the euclidean gradient of u. The operator $\mathcal{L}$ is the Levi operator, and it naturally arises in the study of the curvature of a real hypersurface in C^2. Indeed if k is the Levi curvature of $\{u : u = 0\}$, then u satisfies the equation

$$\mathcal{L}u = k\frac{(1+|gradu|^2)^{\frac{3}{2}}}{1+u_t^2}. \tag{14}$$

Hence (12) is just a simplification of this one. It is a quasilinear elliptic equation, whose characteristic form is positively semidefined but has the last eingenvalue identically 0. Hence, suitably adapting elliptic techniques, some geometric properties of (14) were established. In particular Tommassini and Sladowsky proved that,

if Ω is pseudoconvex, and k satisfies suitable geometric hypotheses, (14) has at least a viscous solution $u \in Lip(\Omega)$ such that $u = 0$ on $\partial\Omega$.

The same result also holds for equation (12). Here we'll show that

Theorem 1 *If $\alpha > \frac{1}{2}$, $k(\xi) \neq 0$ for every $\xi \in \Omega$ and u is a solution of (12) of class $C^{2,\alpha}$, then u is of class C^∞.*

A small gap is then left between these two results.

The technique we apply has been introduced by Folland, Folland and Stein, and Rothshild and Stein for **linear** operators, sum of square of vector fields, with C^∞ coefficients. However, for the application to the quasilinear case, we need to consider operators with less regular coefficients. Hence we'll start by studying a particular class of linear operators (see paragraph 2).

We will call linearized operator of $\mathcal{L}$

$$Lu = u_{xx} + u_{yy} + 2au_{xt} - 2bu_{yt} + (a^2+b^2)u_{tt},$$

for continuous functions a and b. We will denote X and Y respectively the first and the second columns of the characteristic matrix of L:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \quad and \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

and we define the derivative in the direction X exactly as in the regular case. If ξ is fixed, and $\gamma : [0,1] \to R^3$ is an integral curve of X such that $\gamma(0) = \xi$, we call

$$Xu(\xi) = \frac{d}{dh}(u \circ \gamma_i)_{|h=0}. \tag{15}$$

(Yu is defined in an analogous way). We say that u is of class C^1_L if there exist Xu and Yu, and they are continuous. Note that, if u is of class C^∞ in the classical sense, it is of class C^1_L, but it is not in general of class C^2_L, since

$$Xf = \partial_x f + a\partial_t f \quad \forall f \in C^\infty,$$

which has in general no derivatives, if a is only continuous.

Then we assume that

H1) a and $b \in C^1_L$

H2) $Xb - Ya \neq 0 \forall x \in \Omega$.

Hypothesis H2) ensures that $\forall \xi, \xi_0 \in \Omega$ there exists a piecewise regular path $\gamma : [0,T] \to \Omega$, integral curve of X or Y at all points where it is regular, such that $\gamma(0) = \xi$ and $\gamma(1) = \xi_0$. If we call $G(\xi, \xi_0)$ the set of such functions, the control distance naturally associated to L is

$$d(\xi, \xi_0) = inf\{T > 0 | \exists\, \gamma : [0,T] \to R^3,\ \gamma \in G(\xi, \xi_0)\}$$

(see [NSW] for the definition in the regular case). In terms of this distance it is possible to define the Lipschitz classes $C^\alpha_L(\Omega)$: we say that a function u is of class C^α_L if

$$|u(\xi) - u(\xi_0)| \leq Cd^\alpha(\xi, \xi_0) \quad \forall \xi, \xi_0 \in \Omega,$$

and u is of class $C^{1,\alpha}_L$ if its derivatives of order one are in C^α_L. With these notations we will prove

Theorem 2 *Let u be a solution of class $C^{2,\alpha}_L$ of the equation $Lu = f \in C^{1,\alpha}_L$, where a and b satisfy H1, H2 and are of class $C^{2,\alpha}_L$. Then $u \in C^{3,\alpha}_L$.*

The prove of this theorem is achieved with a suitable adaptation of the freezing method: we call frozen operator of L the operator whose coefficients are the first order Taylor expansion of the coefficients of L. The operator we obtain is the Kohn Laplacian on the Heisenber group: an hypoelliptic second order operator, which has already been intensively studied. In particular it is known the explicit expression of its fundamental solution. Using this expression we write a representation formula for the solutions of $Lu = f$. Then, taking the derivatives of this formula, we prove Theorem 2.

Finally, in paragraph 3, we apply this theorem to prove Theorem 1.

5 Bibliografia

[B] J.Bony, *Principe du Maximum, Inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **19**, 1969, 277-304.

[BG] E.Bedford, B.Gaveau, *Envelopes of holomorphy of certain 2-spheres in* C^2, Am. J. of Math., **105**, 1983, 975-1009.

[C] G.Citti, *A comparison theorem for the Levi equation*, Rend. Mat. Acc. Lincei s.9, v.4: (1993) 207-212.

[DG] A.Debiard, B.Gaveau, *Problème de Dirichlet pour l'équation de Levi*, Bull. Sc. Math., II, **102**, no. 4, 1978, 386-369.

[FS] G.B. Folland e E.M.Stein, *Estimates for the* $\bar{\partial}_b$ *Complex and Analysis on the Heisenberg Group*, Comm. Pure Appl. Math. **20** (1974), 429 - 522.

[NSW] A.Nagel, E.M.Stein, S.Wainger *Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties.* Acta Math.155 (1985) 103-147.

[RS] L.Rothschild, E.M.Stein *Hypoelliptic differential operators and nihilpotent Lie groups* Acta Math. 137, (1977) 247-320.

[ST] Z.Slodkowski, G.Tomassini, *Weak solutions for the Levi equation and Envelope of Holomorphy*, J. Funct. Anal, **101**, no. 4, 1991, 392-407.

[T] G.Tomassini, *Geometric Properties of Solutions of the Levi Equation*, Ann. di Mat. Pura e Appl, **152**, 1988, 331-344.